Сообщения

Электричество, 2017, № 2, с. 55–58.

Индуктивность круговой катушки с прямоугольным поперечным сечением

ЛУГАНСКИЙ Л.Б.

В фундаментальных монографиях [1–3] расчеты индуктивностей проводятся с помощью таблиц, графиков и приближенных формул в виде рядов с конечным числом членов, разложение ведется по различным параметрам малости. Во многих практических случаях, особенно при поисках оптимальной конструкции магнитных систем, требующих многократных вычислений индуктивности, эти методы оказываются неудобными. При современном развитии вычислительной техники целесообразно эти расчеты максимально формализовать и выполнять на компьютерах. В статье представлены формулы для расчета собственной индуктивности круговых катушек без магнитного сердечника, имеющих прямоугольное поперечное сечение и однородное распределение плотности тока по сечению. Расчет сводится к однократному интегрированию некоторой достаточно просто вычисляемой функции, которое легко может быть выполнено на любом персональном компьютере с помощью стандартных программ. Такой подход весьма близок к описанному в [4]. Однако формулы, приведенные в [4], поражают своей громоздкостью и к тому же страдают большим числом опечаток, что не позволяет непосредственно использовать их на практике.*

Ключевые слова: *индуктивность, расчет, дисковая катушка, тонкостенный соленоид*

Рассмотрим аксиально-симметричную катушку с прямоугольным поперечным сечением, имеющую длину $l=2b$, внутренний радиус a_1 и внешний a_2. Пусть N – число витков в катушке, I – ток в проводнике. Найдем энергию магнитного поля такой катушки U, после чего определим ее индуктивность L из общеизвестной формулы $U=\frac{1}{2}LI^2$. Возьмем два элементарных токовых витка в сечении катушки $i_1=j(r_1,z_1)dr_1dz_1$ и $i_2=j(r_2,z_2)dr_2dz_2$, где (r_1,z_1) и (r_2,z_2) – координаты витков в сечении катушки. Взаимная энергия dU_{12} этих двух витков, как известно [5], выражается формулой $dU_{12}=2\pi r_1 i_1 A_2(r_1,z_1)$, где $A_2(r_1,z_1)$ – азимутальная (и единственная) компонента векторного потенциала магнитного поля, создаваемого током i_2 в месте положения первого витка (r_1,z_1) [5]:

$$A_2(r_1,z_1)=\frac{\mu_0 i_2 r_2}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2+(z_2-z_1)^2}}, \tag{1}$$

где $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Г/м – магнитная постоянная.

Интегрируя дважды по сечению катушки и учитывая двукратный подсчет каждого элементарного витка, получаем полную энергию катушки:

$$U=\frac{1}{2}\mu_0\int_0^{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\frac{j(r_1)j(r_2)r_1r_2\cos\varphi dr_1dr_2dz_1dz_2d\varphi}{\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2+(z_2-z_1)^2}}=\frac{1}{2}LI^2. \tag{2}$$

Для обычной катушки с однородной плотностью тока

$$j=\frac{NI}{2b(a_2-a_1)}, \tag{3}$$

таким образом, индуктивность обычной катушки без магнитного сердечника выражается пятикратным интегралом:

$$L=\frac{\mu_0N^2}{4b^2(a_2-a_1)^2}\times\int_0^{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\frac{r_1r_2\cos\varphi dr_1dr_2dz_1dz_2d\varphi}{\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2+(z_2-z_1)^2}}. \tag{4}$$

Интегрирование по z_1 и z_2 в (4) выполняется элементарно:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\frac{dz_1dz_2}{\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2+(z_2-z_1)^2}}=$$

* Читатели также могут ознакомиться с расчетом магнитного поля круглой катушки с прямоугольным поперечным сечением в гл. 4 книги Алиевского Б.Л., Октябрьского А.М., Орлова В.Л., Постникова В.А. Моделирование магнитных полей осесимметричных систем: Учебное пос./Под ред. Б.Л. Алиевского. – М.: Изд-во МАИ, 2007, 320 с. – *Ред.*

$$=2\left(\sqrt{C}-\sqrt{A}+b\ln\frac{\sqrt{A}+2b}{\sqrt{A}-2b}\right), \qquad (5)$$

где введены обозначения:

$$C=r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2; \qquad (6)$$

$$A=r_1^2-2r_1r_2\cos\varphi+r_2^2+4b^2=C+4b^2. \qquad (7)$$

В результате формула (4) принимает вид:

$$L=\frac{\mu_0N^2}{4b^2(a_2-a_1)^2}\int_0^{\pi}\cos\varphi\times$$

$$\times\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}r_1r_2\left(\sqrt{C}-\sqrt{A}+b\ln\frac{\sqrt{A}+2b}{\sqrt{A}-2b}\right)dr_1dr_2d\varphi. \qquad (8)$$

Оказывается, и в этой формуле дальнейшее интегрирование по r_1 и r_2 можно выполнить аналитически. Это интегрирование требует весьма трудоемких и громоздких вычислений, которые здесь не приводим. Запишем окончательную формулу для вычисления индуктивности, используя стандартные безразмерные параметры, определяющие размеры сечения катушки [6]:

$$\alpha=a_2/a_1;\ \ \beta=b/a_1. \qquad (9)$$

В итоге формула (8) примет вид:

$$L=\frac{\mu_0N^2a_1}{2\beta^2(\alpha-1)^2}\int_0^{\pi}F(\varphi)\cos\varphi d\varphi, \qquad (10)$$

где функция вычисляется двойной подстановкой

$$F(\varphi)=f(r_1,r_2,\varphi)\Big|_{r_1=1}^{r_1=\alpha}\Big|_{r_2=1}^{r_2=\alpha}=$$

$$=f(\alpha,\alpha,\varphi)-2f(1,\alpha,\varphi)+f(1,1,\varphi) \qquad (11)$$

в функцию $f(r_1,r_2,\varphi)$, которую находим в результате вышеупомянутого двойного интегрирования в (8). Эта функция симметрична относительно безразмерных аргументов r_1 и r_2 и выражается в виде суммы шести других функций:

$$f(r_1,r_2,\varphi)=g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+g_6, \qquad (12)$$

которые, в свою очередь, определяются формулами:

$$g_1(r_1,r_2,\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{4}\beta[2(r_1^4+r_2^4)\sin^2\varphi-(r_1^2-r_2^2)^2]\ln\frac{\sqrt{A}+2\beta}{\sqrt{C}}, \\ \text{если}\quad \varphi\neq0\ \ \text{или}\ \ r_1\neq r_2, \\ 0,\ \ \text{если}\ \ \varphi=0\ \ \text{и}\ \ r_1=r_2; \end{cases} \qquad (13)$$

$$g_2(r_1,r_2,\varphi)=\frac{1}{30}\sqrt{C}[2C^2+7Cr_1r_2\cos\varphi-$$

$$-3(r_2^2-r_1^2)^2\cos^2\varphi]-\frac{1}{30}\sqrt{A}[2A^2+(7A+4\beta^2)\times$$

$$\times r_1r_2\cos\varphi-3(r_2^2-r_1^2)^2\cos^2\varphi-$$

$$-25(r_1^2+r_2^2)\beta^2-32\beta^4]; \qquad (14)$$

$$g_3(r_1,r_2,\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{10}\sin^2\varphi\cos\varphi\left[r_1^5\ln\frac{r_2-r_1\cos\varphi+\sqrt{C}}{r_2-r_1\cos\varphi+\sqrt{A}}+\right. \\ \left.+r_2^5\ln\frac{r_1-r_2\cos\varphi+\sqrt{C}}{r_1-r_2\cos\varphi+\sqrt{A}}\right], \\ \text{если}\quad\varphi\neq0, \\ 0,\ \ \text{если}\ \ \varphi=0; \end{cases} \qquad (15)$$

$$g_4(r_1,r_2,\varphi)=\frac{2}{3}\beta^2\cos\varphi[r_1^3\ln(r_2-r_1\cos\varphi+\sqrt{A})+$$

$$+r_2^3\ln(r_1-r_2\cos\varphi+\sqrt{A})]; \qquad (16)$$

$$g_5(r_1,r_2,\varphi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\beta\sin\varphi\cos\varphi\left[r_1^4\arctan\frac{2\beta(r_2-r_1\cos\varphi)}{r_1\sqrt{A}\sin\varphi}+\right. \\ \left.+r_2^4\arctan\frac{2\beta(r_1-r_2\cos\varphi)}{r_2\sqrt{A}\sin\varphi}\right],\ \ \text{если}\ \ \sin\varphi\neq0, \\ 0,\ \ \text{если}\ \ \sin\varphi=0; \end{cases} \qquad (17)$$

$$g_6(r_1,r_2,\varphi)=\frac{4}{15}\beta^4h(r_1,r_2,\varphi). \qquad (18)$$

Напомним, что во всех формулах (11)–(18) параметры r_1 и r_2 считаются безразмерными, отнесенными к значению внутреннего радиуса катушки a_1.

Функцию $h(r_1,r_2,\varphi)$ можно вычислять по одной из двух формул:

$$h(r_1,r_2,\varphi)=\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\sqrt{A}-\frac{4\beta\cos\varphi}{\sin\varphi}\times\right.$$

$$\left.\times\arctan\left(\frac{\sqrt{A}+r_1+r_2}{2\beta}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]\ddot{\leftrightarrow}\frac{1}{\sin^2\varphi}\times$$

$$\times\left[\sqrt{A}+\frac{4\beta\cos\varphi}{\sin\varphi}\arctan\left(\frac{2\beta}{\sqrt{A}+r_1+r_2}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]. \qquad (19)$$

Знак $\ddot{\leftrightarrow}$ между двумя функциями в (19) означает равенство их производных $\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial r_2}$, т.е. запись

$u(r_1,r_2)\overset{..}{\leftrightarrow}v(r_1,r_2)$ означает, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial r_2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial r_1 \partial r_2}$ и, следовательно, равны подстановки (11) – $u(r_1,r_2)\Big|_{r_1=1}^{r_1=\alpha}\Big|_{r_2=1}^{r_2=\alpha}=v(r_1,r_2)\Big|_{r_1=1}^{r_1=\alpha}\Big|_{r_2=1}^{r_2=\alpha}$. Функция $h(r_1,r_2,\varphi)$ имеет особенности при $\varphi\to 0$ и $\varphi\to\pi$, значительно более сложные, чем аналогичные особенности у вышеприведенных функций g_1, g_3, g_5 в формулах (13), (15) и (17).

При φ вблизи 0 функцию h можно вычислять по формуле

$$h(r_1,r_2,\varphi)=\frac{\sqrt{A}}{(1+\cos\varphi)^2}+\frac{4\beta\cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^3}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{A}+r_1+r_2}{2\beta}\right)^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+3}x^{2k}, \qquad (20)$$

где $x=\dfrac{\sqrt{A}+r_1+r_2}{2\beta}\dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$.

Эта формула получается из первого представления функции h в (19) путем разложения в ряд арктангенса и устранения неопределенности при $\varphi\to 0$. При φ вблизи π функцию h можно вычислять по формуле

$$h(r_1,r_2,\varphi)=\frac{4\beta^2-2r_1r_2(1-\cos\varphi)}{(\sqrt{A}+r_1+r_2)(1-\cos\varphi)^2}-$$
$$-\frac{4\beta\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)^3}\left(\frac{2\beta}{\sqrt{A}+r_1+r_2}\right)^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+3}x^{2k}, \quad (21)$$

где $x=\dfrac{2\beta}{\sqrt{A}+r_1+r_2}\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$.

Эта формула получается из второго представления функции h в (19) путем разложения в ряд арктангенса и устранения неопределенности при $\varphi\to\pi$. В других случаях расчет функции h можно вести по любому из двух представлений в (19), важно только, чтобы все три значения функции h в подстановке (11) вычислялись единообразно.

Итак, расчет индуктивности катушки прямоугольного сечения сводится к однократному интегрированию (10) функции $F(\varphi)\cos\varphi$, вычисляемой аналитически и не имеющей особенностей на отрезке интегрирования.

Индуктивность дисковой катушки. При $b\to 0$ получаем плоскую дисковую катушку. Формулы для ее индуктивности легче получить исходя из основной формулы (2), которая при $b=0$ принимает вид:

$$U=\frac{1}{2}\mu_0\int_0^{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{i(r_1)i(r_2)r_1r_2\cos\varphi dr_1dr_2}{\sqrt{C}}=\frac{1}{2}LI^2, \quad (22)$$

где $i(r)$ – линейная плотность тока в катушке; C – определена формулой (6). При однородной плотности тока $i(r)=\dfrac{NI}{a_2-a_1}$ для индуктивности дисковой катушки получаем

$$L_d=\frac{\mu_0N^2}{(a_2-a_1)^2}\int_0^{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{r_1r_2\cos\varphi dr_1dr_2}{\sqrt{C}}. \qquad (23)$$

Двойное интегрирование по r_1 и r_2 выполняется аналитически:

$$\iint\frac{r_1r_2dr_1dr_2}{\sqrt{C}}=\frac{1}{3}(r_1^2+r_2^2)\sqrt{C}+\frac{1}{3}\cos\varphi[r_1^3\ln(r_2-r_1\cos\varphi+$$
$$+\sqrt{C})+r_2^3\ln(r_1-r_2\cos\varphi+\sqrt{C})]. \qquad (24)$$

Используя параметр $\alpha=a_2/a_1$, получаем формулу для индуктивности дисковой катушки, аналогичную (10):

$$L_d=\frac{\mu_0N^2a_1}{(\alpha-1)^2}\int_0^{\pi}F_d(\varphi)\cos\varphi d\varphi, \qquad (25)$$

где

$$F_d(\varphi)=\int_1^{\alpha}\int_1^{\alpha}\frac{r_1r_2dr_1dr_2}{\sqrt{C}}=f_d(r_1,r_2,\varphi)\Big|_{r_1=1}^{r_1=\alpha}\Big|_{r_2=1}^{r_2=\alpha}.$$

Функция f_d описывается формулой в правой части (24). Вследствие относительной простоты функции $F_d(\varphi)$ выражение для L_d можно несколько упростить и представить в более удобном для интегрирования виде:

$$L_d=\frac{\mu_0N^2a_1}{3(\alpha-1)^2}\left(P_0+\int_0^{\pi}H(\varphi)d\varphi\right), \qquad (26)$$

здесь

$$P_0=(1+\alpha^3)\left(2G-\frac{\pi}{2}\ln 2-1-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\alpha^3\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln\alpha\right)=$$
$$=-1{,}042260(1+\alpha^3)+\pi\alpha^3\left(0{,}693147-\frac{1}{2}\ln\alpha\right), \quad (27)$$

где $G=0{,}915965...$ – постоянная Каталана;

$$H(\varphi)=\alpha^3\left[\sin^2\varphi\ln\left(\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}+1-\alpha\cos\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-2\alpha\cos\frac{\varphi}{2}+\alpha^2}+\alpha\cos\frac{\varphi}{2}-1}{\sqrt{1+2\alpha\sin\frac{\varphi}{2}+\alpha^2}+\alpha\sin\frac{\varphi}{2}+1}\right]-$$
$$-(1+\alpha^2)\cos\varphi\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}-\cos^2\varphi\times$$
$$\times\ln\left(\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}+\alpha-\cos\varphi\right). \qquad (28)$$

Индуктивность тонкого соленоида. Тонкий соленоид есть предельный случай катушки прямоугольного сечения при $a_2 \to a_1$. Линейная плотностьтока в обмотке $i = \dfrac{NI}{2b}$. Из исходной формулы (2) получим индуктивность тонкого соленоида:

$$L_s = \frac{\mu_0 N^2 a_1^2}{2b^2} \int_0^{\pi} \cos\varphi \left(\sqrt{C} - \sqrt{A} + b \ln \frac{\sqrt{A} + 2b}{\sqrt{A} - 2b} \right) d\varphi, \quad (29)$$

где C и A, определяемые формулами (6) и (7), при условии $a_1 = a_2$ равны: $C = 4a_1^2 \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$; $A = 4\left(b^2 + a_1^2 \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}\right)$. Интегрирование в (28) может быть выполнено аналитически, в результате получим формулу для индуктивности тонкого соленоида:

$$L_s = \frac{2\mu_0 N^2 a_1}{3} \left\{ \sqrt{1+\beta^2} \left[K(k) + \frac{1-\beta^2}{\beta^2} E(k) \right] - \frac{1}{\beta^2} \right\}, \quad (30)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода от модуля

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad (\beta = b / a_1). \quad (31)$$

Этот результат совпадает с формулой, приведенной в [1].

На основе полученных выше формул была составлена программа на языке Фортран, с помощью которой рассчитаны индуктивности катушек прямоугольного сечения, а также дисковых и тонкостенных катушек с самыми разнообразными значениями параметров α и β. Результаты расчетов совпадают с приведенными в [1] при относительной точности лучше 10^{-5}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.** Расчет индуктивностей. — Л.: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.

2. **Dwight H.B.** Electrical Coils and Conductors. — New York—London: McGrow-Hill, 1945, 351 p.

3. **Grover F.W.** Inductance Calculations. — Dover, 2004, 286 p.

4. **Yu D., Han K.S.** Selfinductance of Air-Core Circular Coils with Rectangular Cross Section. — IEEE Trans. on Magn., 1987, vol. Mag-23, № 6, pp. 3916—3921.

5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 2005, 656 с.

6. **Монтгомери Б.** Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. — М.: Мир, 1971, 360 с.

[11.07.2016]

*А в т о р ы: **Луганский Лев Борисович** окончил Московский физико-технический институт в 1964 г. Докторскую диссертацию «Оптимальное проектирование магнитных систем и синтез магнитных полей» защитил в 1996 г. Ведущий научный сотрудник Института физических проблем РАН им. П.Л. Капицы.*

Elektrichestvo (Electricity), 2017, No 2, pp. 50—53.

The Inductance of a Circular Coil with Rectangular Cross Section

LUGANSKII Lev Borisovich *(P.L. Kapitsa Institute of Physical Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia) — Leading scientific researcher, Dr. Sci. (Eng.)*

In the fundamental monographs [1—3], inductances are calculated using tables, graphs and approximate formulas in the form of series containing a finite number of terms, which are expanded with respect to different smallness parameters. In many practical cases, especially in searching for the optimal design of magnetic systems involving multiple calculations of inductance, such methods turn to be inconvenient. With the modern state of computer engineering, it is advisable to formalize these calculations to the maximum possible extent and carry out them on computers. The article presents formulas for calculating self inductance of circular coils without a magnetic core that have a rectangular cross section and uniform distribution of current over the cross section. The calculation boils down to single integration of a certain quite simply calculated function, which can be easily carried out on any personal computer using standard programs. Such an approach is quite close to the one described in [4]. However, the formulas given in [4] are strikingly cumbersome and contain a number of misprints, due to which they cannot be directly used in practice.

K e y w o r d s: *inductance, calculation, disk coil, thin-walled solenoid*

REFERENCES

1. **Kalantarov P.L., Tseitlin L.A.** *Raschet induktivnostei* (Inductance Calculations). Leningrad, Energoatomizdat, 1986, 488 p.

2. **Dwight H.B.** Electrical Coils and Conductors. — New York—London: McGrow-Hill, 1945, 351 p.

3. **Grover F.W.** Inductance Calculations. — Dover, 2004, 286 p.

4. **Yu D., Han K.S.** Selfinductance of Air-Core Circular Coils with Rectangular Cross Section. — IEEE Trans. on Magn., 1987, vol. Mag-23, № 6, pp. 3916—3921.

5. **Landau L.D., Lifshits Ye.M.** *Elektrodinamika sploshnykh sred* (Electrodynamics of continuous media). Moscow, Fizmatgiz, 2005, 656 p.

6. **Montgomeri B.** *Polucheniye sil'nykh magnitnykh polei s pomoshch'yu solenoidov* (Getting strong magnetic fields using solenoids). Moscow, Publ. «Mir», 1971, 360 p.